УДК 532.511

РАЗВОРАЧИВАНИЕ МЯГКОЙ ОБОЛОЧКИ В ПОЛЕ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ

Л.А.Хижняк, канд. физ.-мат. наук
Сумский государственный университет, ул. Р.-Корсакова, 2, Сумы, 40007

В данной работе объектом исследования является мягкая оболочка, которая моделируется системой сосредоточенных масс, соединенных между собой односторонними упругими связями. Согласно принятой модели мягкой оболочки была составлена нелинейная система дифференциальных уравнений движения системы вал – оболочка с переменной угловой скоростью.

ВВЕДЕНИЕ

Под мягкой оболочкой понимается тонкая оболочка, выполненная из материала, воспринимающего только растягивающие усилия.

В отличие от существующих моделей расчета таких оболочек на основе теории сплошных сред предлагается модель оболочки, состоящей из системы дискретных материальных точек, соединенных между собой односторонней упругой связью. Вывод уравнений движения такой модели относится к динамике системы твердых тел [1]. В данной работе методы аналитической механики применены к материалу, который является сплошной средой.

Задачи о совместном движении двух и более тел имеют широкое распространение [2,3]. Работа была выполнена в рамках программы разворачивания мягкой оболочки в космическом пространстве. На тот момент решения подобных задач в литературе не было, поэтому была предпринята попытка представить мягкую оболочку как систему твердых тел, соединенных упругими односторонними связями.

Обзор литературы последних лет так же не дал положительных результатов. Есть автореферат диссертации О.И. Безверхова, НАН Украины, институт механики им. Тимошенко (2005 г.), в котором разработан и численно реализован метод анализа динамического деформирования упругих и вязкоупругих систем с сосредоточенными массами.

Для постановки задачи о разворачивании безмоментной оболочки с учетом диссипативных сил был проведен обзор литературы [5-7]. Экспериментальными работами [8-10], проведенными под руководством академика Писаренко Г.С., показано, что затухание колебаний пропорционально амплитуде колебаний.

Так как построенная модель мягкой оболочки предполагает только растяжение соединяющих нитей по закону Гука, то и диссипацию энергии в нитях вводим на основе Релеевской диссипативной силы пропорционально удлинению нити.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Мягкая оболочка, имеющая в плане диаметр D, упакована в ограниченный объем. В результате вращения этого объема под действием центробежных сил происходит разворачивание оболочки и расположение её в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Для вывода уравнений движения оболочка диаметром D была разбита на n элементов радиальными и окружными линиями (рис.1). В точках пересечения этих линий приложены массы соответствующих элементов разбиения – сосредоточенные массы. Каждая сосредоточенная масса связана с соседними четырьмя сосредоточенными массами упругими невесомыми связями, работающими только на растяжение.

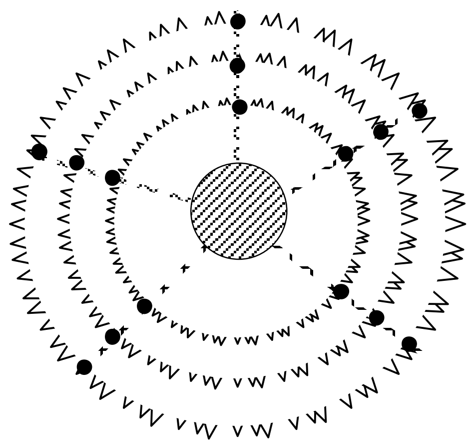

Рисунок 1 – Модель мягкой оболочки в развернутом виде

Обозначим координаты каждой сосредоточенной массы (или материальной точки) m_{ij} в относительной системе координат, вращающейся со скоростью $\omega(t)$: $r_{ij}, \varphi_{ij}, z_{ij}$, $i = 1 \div N$ - разбиение по радиусу, $j = 1 \div M$ - разбиение по окружности $n = N \times M$. Тогда в абсолютной системе координат будем иметь

$$r'_{ij} = r_{ij}, \quad \varphi'_{ij} = \varphi_{ij} + \int \omega(t)\,dt, \quad z'_{ij} = z_{ij}.$$

Кинетическая энергия каждой материальной точки в абсолютном движении будет [4]:

$$T_{ij} = \frac{m_{ij}\left[\dot{z}_{ij}^2 + \dot{r}_{ij}^2 + r^2{}_{ij}(\dot{\varphi}_{ij} + \omega)^2\right]}{2}\ . \tag{1}$$

Потенциальная энергия упругой связи $\Pi_{ij}^{(k)}$ пропорциональна квадрату удлинения упругой связи. Удлинение связи вычисляем как разность расстояний между двумя соседними точками в произвольный момент времени $R_{ij}^{(k)}$ и расстоянием $l_{ij}^{(k)}$ в развернутом неподвижном состоянии:

$$R_{ij}^{(k)} = \left[r^2{}_{ij} + r^2{}_{i-1j} - 2r_{ij}r_{i-1j}\cos\left(\varphi_{i-1j} - \varphi_{ij}\right) + \left(z_{ij} - z_{i-1j}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{2}$$

где $k = 1 \div 4$.

Каждая материальная точка m_{ij} имеет по четыре односторонние упругие связи ($k = 1 \div 4$). Точки внешнего края по три упругие связи. Точки внутреннего ряда закреплены на вращающемся валу. Таким образом, потенциальная энергия точки m_{ij} имеет вид

$$\Pi_{ij} = \sum_{k=1}^{4} \Pi_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^{4} \frac{C_{ij}^{k}\left(R_{ij}^{(k)} - l_{ij}^{(k)}\right)^{2}}{2}. \tag{3}$$

Односторонняя упругая связь выражается равенством

$$\Pi_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \Pi_{ij}^{(k)}, & если \quad R_{ij}^{(k)} \ge l_{ij}^{(k)}, \\ 0, & если \quad R_{ij}^{(k)} < l_{ij}^{(k)}. \end{cases} \tag{4}$$

Считая введенные выше связи между материальными точками идеальными, поэтому можем использовать метод Лагранжа для вывода уравнений движения массы m_{ij}:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}_{ij}}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial \mathrm{T}_{ij}}{\partial q_l} = -\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial q_l}, \qquad l = 1,2,3\,, \tag{5}$$

$$q_1 = r_{ij}, \qquad q_2 = \varphi_{ij}, \qquad q_3 = z_{ij}, \qquad \dot{q}_l = \frac{d}{dt} q_l.$$

Тогда система дифференциальных уравнений относительного движения точек при переменной угловой скорости вращения будет иметь вид

$$\ddot{r}_{ij} = r_{ij}\left(\dot{\varphi}_{ij} + \omega\right)^{2} - \sum_{k=1}^{4}\left[\frac{c_{ij}^{(k)}}{m_{ij}}\left(R_{ij}^{(k)} - l_{ij}^{(k)}\right) + \frac{\beta}{m_{ij}}\frac{\dot{D}_{ij}^{(k)}}{R_{ij}^{(k)}}\right]\frac{\partial R_{ij}^{(k)}}{\partial r_{ij}},$$

$$\ddot{\varphi}_{ij} = -\dot{\omega} - 2\dot{r}_{ij}\left(\dot{\varphi}_{ij} + \omega\right) r_{ij} - \frac{1}{r_{ij}^{2}}\sum_{k=1}^{4}\left[\frac{c_{ij}^{(k)}}{m_{ij}}\left(R_{ij}^{(k)} - l_{ij}^{(k)}\right) + \frac{\beta}{m_{ij}}\frac{\dot{D}_{ij}^{(k)}}{R_{ij}^{(k)}}\right]\frac{\partial R_{ij}^{(k)}}{\partial \varphi_{ij}}, \tag{6}$$

$$\ddot{z}_{ij} = -\sum_{k=1}^{4}\left[\frac{c_{ij}^{(k)}}{m_{ij}}\left(R_{ij}^{(k)} - l_{ij}^{(k)}\right) + \frac{\beta}{m_{ij}}\frac{\dot{D}_{ij}^{(k)}}{R_{ij}^{(k)}}\right]\frac{\partial R_{ij}^{(k)}}{\partial z_{ij}}, \qquad i,j = 1,2,\ldots,N.$$

В системе уравнений (6) угловая скорость $\omega(t)$ является неизвестной, зависящей от времени величиной. Для её определения необходимо еще одно уравнение, связывающее движение мягкой оболочки с движением вала в единую динамическую систему. Дополнительное уравнение получим, используя теорему об изменении кинетического момента.

Вычислим кинетический момент этой системы материальных тел относительно начала координат, совпадающего с осью вращения вала.

Вектор скорости сосредоточенной массы в неподвижной цилиндрической системе координат

$$\vec{v}_{ij} = \dot{r}_{ij}\vec{r} + \dot{z}_{ij}\vec{z} + r_{ij}\left(\dot{\varphi}_{ij} + \omega\right)\vec{\varphi}\ ,$$

где $\vec{r}, \vec{\varphi}, \vec{z}$ - единичные орты.

Кинетический момент этой массы равен

$$\vec{l}_{ij} = \vec{r}_{ij} \times m_{ij}\vec{v}_{ij} = m_{ij}\left[\vec{r}_{ij} \times \dot{r}_{ij}\vec{r} + \dot{z}_{ij}\vec{r}_{ij} \times \vec{z} + r_{ij}\left(\dot{\varphi}_{ij} + \omega\right)\vec{r}_{ij} \times \vec{\varphi}\right].$$

Проекции кинетического момента на оси координат равны

$$L_z = \sum_{i,j=1}^{N} m_{ij} r_{ij}^2 \left(\dot{\varphi}_{ij} + \omega\right),$$

$$L_\varphi = \sum_{i,j=1}^{N} m_{ij} r_{ij} \dot{z}_{ij}\ ,$$

$L_r = 0$ - на основании свойств векторного произведения.

Кинетический момент вала $L_z^b = I_z\omega$, где I_z - момент инерции.

Применяя теорему о кинетическом моменте системы, получим

$$\frac{d}{dt}\left(L_z + I_z\omega\right) = M_z, \quad \frac{d}{dt}L_\varphi = M_\varphi, \quad \frac{d}{dt}L_r = M_r\ ,$$

где M_z, M_φ, M_r - проекции главного момента внешних сил. Имеем при вращательном движении вокруг неподвижной оси $M_\varphi = M_r = 0$, следовательно, остается одно уравнение:

$$\frac{d}{dt}\left[I_z\omega + \sum_{i,j=1}^{N} m_{ij} r_{ij}^2 \left(\dot{\varphi}_{ij} + \omega\right)\right] = M_z,$$

$$\frac{d}{dt}\left(I_z\omega\right) + \sum_{i,j=1}^{N} m_{ij}\left[2r_{ij}\dot{r}_{ij}\left(\dot{\varphi}_{ij} + \omega\right) + r_{ij}^2\left(\ddot{\varphi}_{ij} + \dot{\omega}\right)\right] = M_z\ . \tag{7}$$

Подставляя в уравнение (7) второе уравнение из (6), получим после сокращения

$$I_z\frac{d\omega}{dt} = M_z + \sum_{i,j=1}^{N}\sum_{k=1}^{4}\left[\frac{c_{ij}^{(k)}}{m_{ij}}\left(R_{ij}^{(k)} - l_{ij}^{(k)}\right) + \frac{\beta}{m_{ij}}\frac{\dot{D}_{ij}^{(k)}}{R_{ij}^{(k)}}\right]\frac{\partial R_{ij}^{(k)}}{\partial\varphi_{ij}}\ . \tag{8}$$

Слагаемые этой суммы являются внутренними упругими силами, действующими в нитях. Они входят в эту сумму попарно с противоположными знаками все, кроме сил, возникающих в нитях, соединяющих оболочку с валом (они входят в систему один раз). Таким образом, сокращая в уравнении (8) внутренние силы, полу чим

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M_z}{I_z} + \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{c_{kj}^{(4)}}{I_z}\left(R_{kj}^{(4)} - l_{kj}^{(4)}\right) + \frac{\beta}{I_z}\frac{\dot{D}_{kj}^{(4)}}{R_{kj}^{(4)}}\right]\frac{\partial R_{kj}^{(4)}}{\partial \varphi_{kj}} \quad . \tag{9}$$

Уравнение (9) является недостающим уравнением в системе (6) для определения неизвестной угловой скорости $\omega(t)$ вращения системы мягкая оболочка - вал. Величина M_z - внешний вращающий момент, передающий вращение от двигателя к валу.

К системе (6, 9) необходимо присоединить начальные и граничные условия. Начальными условиями являются значения координат материальных масс и их скоростей в начальный момент времени. Граничные условия учитываются следующим образом: внешний край оболочки свободен от связей, поэтому четвертая связь для крайних элементов отсутствует. Внутренний край оболочки закреплен на вращающемся валу и имеет постоянные координаты и известные скорости вращения. Односторонние связи учитываются при выборе значений упругих коэффициентов $C_{ij}^{(k)}$ в соответствии с условием (3).

ВЫВОДЫ

Полученная система уравнений (6, 9) дает возможность определить координаты сосредоточенных масс и угловой скорости в любой момент времени, однако эта система может быть решена только численными методами, так как входящие в неё коэффициенты $C_{ij}^{(k)}$ являются разрывными функциями.

Анализируя результаты численного эксперимента, можно сделать вывод: траектории движения материальных точек имеют спиралевидный характер. В тоже время относительно друг друга точки совершают колебательные движения с периодом порядка T≅1 с и частотой $\nu \cong 0{,}4$ с$^{-1}$, причем соседние точки колеблются в противофазе. Колебательный процесс по радиусу менее выражен, чем в тангенциальном направлении. На рис. 2 приведена приблизительная траектория движения периферийной точки. Выход периферийной точки на радиус 2,5 м происходит за время $t = 2$ с. При дальнейшем движении радиус уменьшается, что свидетельствует о сворачивании, после которого следует резкое разворачивание.

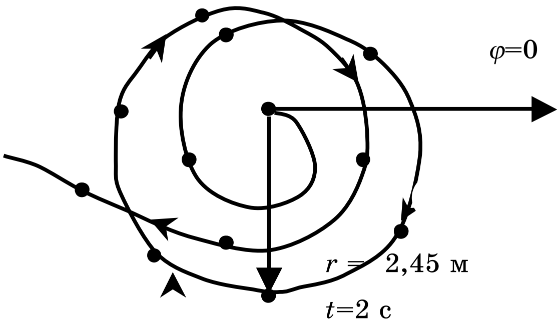

Рисунок 2 – Траектория движения одной периферийной точки

Основным результатом работы можно считать вывод системы дифференциальных уравнений, описывающих движение n материальных точек, связанных между собой односторонней упругой связью под действием центробежных сил.

SUMMARY

UNFOLDING OF THE SOFT CASING IN THE CENTRIFUGAL FORCE FIELD

L.A.Khyzhnyak

Sumy State University, 2, R.-Korsakov St. Sumy, 40007, Ukraine

A soft casing that is modeled by a system of cumulative masses conjugated by unilateral flexible constraints is under investigation in this work. According to the accepted soft casing model there was a nonlinear system of differential equations of the motion of the shaft - casing system with variable angular velocity made up.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1983. – Т. II. – 637 с.
2. Алексеев С.А. Динамика свободных систем материальных точек с упругими связями //Прикладная математика и механика. - 1970. – Вып.3.
3. Белокошко П.А. и др. Задачи динамики многомерных механических систем: Сб. научн. трудов. – Киев: Наукова думка,1986. – 126 с.
4. Лурье А.И. Аналитическая механик. – М.: Государственное издательство физ.- мат. литературы, 1961. – 824 с.
5. Писаренко Г.С. Методы определения характеристик демпфирования колебаний упругих систем. – К.: Наукова думка, 1976. – 86 с.
6. Писаренко Г.С. Проблемы нелинейных колебаний механических систем. – К.: Наукова думка, 1978. – 116 с.
7. Бондаренко А.А., Ковальчук П.С. Об определении нелинейных сил сопротивления при колебаниях механических систем // Прикладная механика. - 1977. – Т.13, № 7. – С. 104 –109.
8. Писаренко Г.С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. – К.: Наукова думка, 1970. – 86 с.
9. Писаренко Г.С. Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале. – К.: Наукова думка, 1970. – 86 с.
10. Писаренко Г.С. О несущей способности быстровращающихся дисков. – К.: Гостехиздат УССР, 1962. – 40 с.

Поступила в редакцию 16 марта 2006 г.